ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 LỚP 9
Quận 1 (2014-2015)

Bài 1: (4 điểm)

a) Cho các số a, b, c khác nhau và thỏa mãn: $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2015$. Tính giá trị của biểu thức $M=c^2(a+b)$

b) Chứng minh rằng: nếu $|a|+|b|\geq 2$ thì phương trình (ẩn x): $2ax^2+bx+1-a=0$ có nghiệm.

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}+7=0$

b) $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\dfrac{3}{2}$

b) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn: p^2+23 có đúng 6 ước dương.

Bài 4: (6 điểm) Cho ΔABC nội tiếp (O;R) có $AB=AC=R\sqrt{2}$. M là điểm di động trên cung AC. Gọi D là giao điểm của AM và BC.

a) Tính độ dài BC theo R.

b) Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng AD. Xác định vị trí của điểm M để $AM+ON$ nhỏ nhất.

Bài 5: (2 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA, CD cắt nhau tại E, các tia DA, CB cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp ΔCEF cắt đường tròn (O) tại N (khác C). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh: M, A, N thẳng hàng.

ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 LỚP 9
Quận 1 (2014-2015)

Bài 1: (4 điểm)
a) Cho các số a, b, c khác nhau và thỏa mãn: $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2015$. Tính giá trị của biểu thức $M=c^2(a+b)$

Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} a^2(b+c)=a(ab+ac+bc)-abc=2015 \\ b^2(c+a)=b(bc+ab+ac)-abc=2015 \end{cases}$

Do đó: $(a-b)(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0(\text{vì } a\neq b) \Rightarrow abc=-2015$

Vậy $c^2(a+b)=c(ca+bc+ab)-abc=-(-2015)=2015$

Cách 2:

Ta có: $a^2(b+c)=b^2(c+a)\Rightarrow a^2b+a^2c-b^2c-b^2a=0\Rightarrow ab(a-b)+c(a-b)(a+b)=0$

$\Rightarrow(a-b)(ab+bc+ca)=0\Rightarrow ab+bc+ca=0(\text{vì } a\neq b)$

Do đó: $a^2(b+c)=a(ab+ac)=a(-bc)=-abc$

Vì vậy: $M=c^2(a+b)=c(ca+bc)=c(-ab)=-abc=a^2(b+c)=2015$

Vậy $M=2015$

b) Chứng minh rằng: nếu $|a|+|b|\geq 2$ thì phương trình (ẩn x): $2ax^2+bx+1-a=0$ có nghiệm.

Cách 1:

Xét phương trình: $2ax^2+bx+1-a=0$ (1) với $|a|+|b|\geq 2$

- $a=0\Rightarrow|b|\geq 2$: (1) có dạng: $bx=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{b}\left(\text{do } |b|\geq 2 \text{ nên } b\neq 0\right)$. Vậy (1) có nghiệm.
- $a\neq 0$: $\Delta=b^2-8a(1-a)$
  - $a(1-a)\leq 0 \Leftrightarrow a<0$ hay $a\geq 1$ thì $\Delta\geq 0 \Rightarrow (1)$ có nghiệm.
  - $a(1-a)\geq 0 \Leftrightarrow 0<a<1$: từ gt ta có : $|b|\geq 2-|a|=2-a$

  $\Rightarrow b^2\geq 4-4a+a^2\Rightarrow b^2-8a(1-a)\geq -8a(1-a)+4-4a+a^2=9a^2-12a+4=(3a-2)^2\geq 0$

  $\Rightarrow\Delta\geq 0 \Rightarrow (1)$ có nghiệm.

Cách 2:

$\Delta=b^2-8a(1-a)=b^2+8a^2-8a$

Từ gt ta có: $4|a|(|a|+|b|)\geq 8|a|\geq 8a\Rightarrow 4a^2+4|ab|\geq 8a \quad (2)$

Mặt khác: $b^2+4a^2\geq 2\sqrt{4a^2b^2}=4|ab| \quad (3)$

Từ (2) và (3) cho ta: $8a^2+b^2\geq 8a\Leftrightarrow 8a^2+b^2-8a\geq 0\Rightarrow\Delta\geq 0$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}+7=0$ (1)

Điều kiện: $x\neq 1$

$$(1)\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^3-3\frac{x^2}{x-1}\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}-1=-8$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^2}{x-1}-1=(-2)^3\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}-1\right)^3=(-2)^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{x-1}-1=-2\ \Leftrightarrow\frac{x^2}{x-1}+1=0\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}(\text{thỏa mãn})$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $\begin{cases}xy+x+1=7y\ (1)\\ x^2y^2+xy+1=13y^2\ (2)\end{cases}$

(2) có $y\neq 0$. Do đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7\\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{x}{y}=7\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}=13\end{cases}\quad \text{Đặt: }\begin{cases}a=x+\dfrac{1}{y}\\ b=\dfrac{x}{y}\end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}a+b=7\\ a^2-b=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=7\\ a^2+a-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=12\end{cases}\text{hay}\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$$

- Với $\begin{cases}a=-5\\ b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=-5\\ x.\dfrac{1}{y}=12\end{cases}$ theo định lý Vi-ét đảo thì $x,\dfrac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình:

$t^2+5t+12=0$: phương trình vô nghiệm.

- Với $\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=4\\ x.\dfrac{1}{y}=3\end{cases}$ theo định lý Vi-ét đảo thì $x,\dfrac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình:

$$h^2-4h+3=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=1\\ h=3\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ \dfrac{1}{y}=3\end{cases}\text{hay}\begin{cases}x=3\\ \dfrac{1}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}\text{hay}\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x;y)=(3;1);\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$

Với a, b, c > 0 thỏa mãn: $a+b+c=abc$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}=\sqrt{\frac{abc}{abc+a^2(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{b}{(a+b)}\cdot\frac{c}{(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right]\quad(1)$$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{1}{2}\left[\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}\right]\quad(2);\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right]\quad(3)$

Từ (1), (2), (3) cho ta: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$

b) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn: p^2+23 có đúng 6 ước dương.

- Với p = 2 thì $p^2+23=27=3^3$ có đúng 4 ước dương (loại).
- Với p = 3 thì $p^2+23=32=2^5$ có đúng 6 ước dương (nhận).
- Với p > 3 thì $p^2+23=p^2-1+24$ (
  - Ta có: p > 3, $p\in P$ nên $p-1;p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)=p^2-1\,\vdots\,4$

  Mà $24\,\vdots\,4\Rightarrow p^2+23\,\vdots\,4$ (1)
  - Mặt khác: p > 3, $p\in P$ nên p không thể chia hết cho 3. Mà $p-1;p;p+1$ là ba số liên tiếp nên tồn tại một số $\vdots\,3\Rightarrow(p-1)(p+1)=p^2-1\,\vdots\,3$ Mà $24\,\vdots\,3$ Nên $p^2+23\,\vdots\,3$ (2)
  - Ta có : $(3;4)=1$ (3)

  Từ (1) , (2), (3) ta có : $p^2+23\,\vdots\,12$

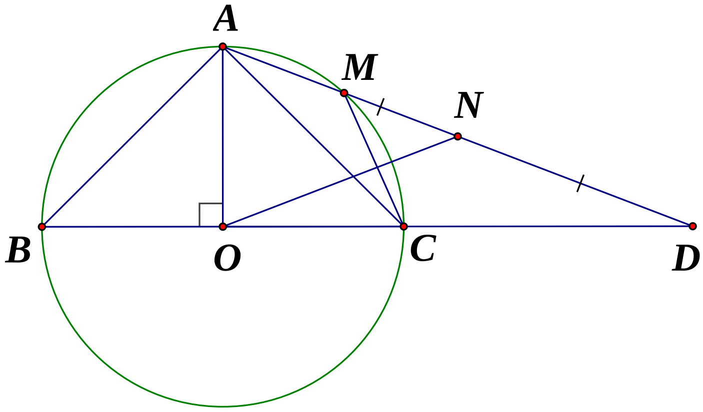
  Ta lại có : $12=2^2.3$ có $(2+1)(1+1)=6$ ước dương.

  Mà $p^2+23>12$ nên p^2+23 có nhiều hơn 6 ước dương (loại)

  [số ước nguyên dương của một số bằng tích của các số mũ cộng 1]

Vậy p = 3 là giá trị cần tìm.

Bài 4: (6 điểm) Cho ΔABC nội tiếp (O;R) có $AB=AC=R\sqrt{2}$. M là điểm di động trên cung AC. Gọi D là giao điểm của AM và BC.



a) Tính độ dài BC theo R.

ΔAOB có: $OA^2 + OB^2 = AB^2 \left(=2R^2\right) \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$

Tương tự: $\widehat{AOC} = 90^0$. Nên B, O, C thẳng hàng $\Rightarrow BC = 2R$

b) Gọi N là trung điểm của đoạn AD. Xác định vị trí của điểm M để $AM + ON$ nhỏ nhất.

Ta có: $ON = \dfrac{AD}{2}$

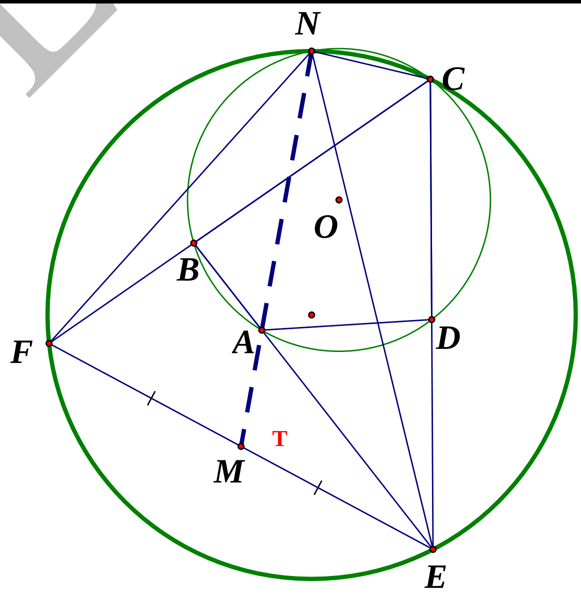
$\Delta ACM \backsim \Delta ADC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow AM.AD = AC^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

Ta có: $AM + ON \geq 2\sqrt{AM.ON} = 2\sqrt{\dfrac{AM.AD}{2}} = 2\sqrt{R^2} = 2R$: Không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = ON = R \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AM} = 60^0$

Vậy khi $M \in AC$, sđ$\overset{\frown}{AM} = 60^0$ thì $AM + ON$ nhỏ nhất.

<u>Bài 5 :</u> (2 điểm)
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA, CD cắt nhau tại E, các tia DA, CB cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp ΔCEF cắt đường tròn (O) tại N (khác C). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh: M, A, N thẳng hàng.



Gọi T là giao điểm của NA và EF.

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{TAF} = \widehat{DAN} \left(\text{đối đỉnh}\right) \\ \widehat{TFN} = \widehat{DAN} \text{(cùng bù } \widehat{ECN}\text{)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{TAF} = \widehat{TFN} \Rightarrow \Delta TAF \backsim \Delta TFN \left(g-g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{TA}{TF} = \frac{TF}{TN} \Rightarrow TF^2 = TA.TN$$

Mặt khác: $\begin{cases} \widehat{TAE} = \widehat{BAN} \left(\text{đối đỉnh}\right) \\ \widehat{TEN} = \widehat{BAN} \left(= \widehat{BCN}\right) \end{cases} \Rightarrow \widehat{TAE} = \widehat{TEN}$

$$\Rightarrow \Delta TAE \backsim \Delta TEN \left(g-g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{TA}{TE} = \frac{TE}{TN} \Rightarrow TE^2 = TA.TN \Rightarrow TE^2 = TF^2 \left(= TA.TN\right) \Rightarrow T \equiv M$$

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.

★ **HẾT** ★